ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 136 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-404-413

УДК 517.988.6, 517.922

Один метод исследования разрешимости краевых задач для неявного дифференциального уравнения

Вассим МЕРЧЕЛА[1,2]

[1] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

[2] ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»
199034, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Университетская набережная, 7/9

Аннотация. В статье рассматривается краевая задача с линейными краевыми условиями общего вида для скалярного дифференциального уравнения

$$f\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) = \widehat{y}(t),$$

не разрешенного относительно производной $\dot{x}$ искомой функции. Предполагается, что функция f удовлетворяет условиям Каратеодори, функция $\widehat{y}$ является измеримой. Предлагаемый метод исследования такой краевой задачи основан на результатах об операторном уравнении с отображением, действующим из метрического пространства в множество с расстоянием (это расстояние удовлетворяет только одной аксиоме метрики: оно равно нулю тогда и только тогда, когда элементы совпадают). В терминах множества накрывания функции $f(t, x_1, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и множества липшицевости функции $f(t, \cdot, x_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ получены условия существования решений и условия устойчивости решений к возмущению функции f, порождающей дифференциальное уравнение, а также к возмущениям правых частей краевой задачи: функции $\widehat{y}$ и значения краевого условия.

Ключевые слова: неявное дифференциальное уравнение, линейные краевые условия, существование решений краевой задачи, накрывающее отображение метрических пространств

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075–15–2019–1619.

Для цитирования: *Мерчела В.* Один метод исследования разрешимости краевых задач для неявного дифференциального уравнения // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 136. С. 404–413. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-404-413.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-404-413

One method for investigating the solvability of boundary value problems for an implicit differential equation

Wassim MERCHELA[1,2]
[1] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
[2] St. Petersburg University
7/9 Universitetskaya nab., St. Petersburg 1990342, Russian Federation

Abstract. The article concernes a boundary value problem with linear boundary conditions of general form for the scalar differential equation

$$f\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) = \widehat{y}(t),$$

not resolved with respect to the derivative $\dot{x}$ of the required function. It is assumed that the function f satisfies the Caratheodory conditions, and the function $\widehat{y}$ is measurable. The method proposed for studying such a boundary value problem is based on the results about operator equation with a mapping acting from a metric space to a set with distance (this distance satisfies only one axiom of a metric: it is equal to zero if and only if the elements coincide). In terms of the covering set of the function $f(t, x_1, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and the Lipschitz set of the function $f(t, \cdot, x_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, conditions for the existence of solutions and their stability to perturbations of the function f generating the differential equation, as well as to perturbations of the right-hand sides of the boundary value problem: the function $\widehat{y}$ and the value of the boundary condition, are obtained.

Keywords: implicit differential equation, linear boundary conditions, existence of solutions to a boundary value problem, covering mapping of metric spaces

Acknowledgements: The work is supported by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement № 075–15–2019–1619.

Mathematics Subject Classification: 34A09, 34B15, 47J05, 47N20.

For citation: Merchela W. Odin metod issledovaniya razreshimosti krayevykh zadach dlya neyavnogo differentsial'nogo uravneniya [One method for investigating the solvability of boundary value problems for an implicit differential equation]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 136, pp. 404–413. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-404-413. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В настоящей работе предлагаются достаточные условия существования и непрерывной зависимости от параметров решений краевой задачи для скалярного дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной искомой абсолютно непрерывной функции (неявного ДУ). Предлагаемые утверждения основаны на результатах [1–3] об операторных уравнениях с отображениями, действующими из метрического пространства в пространство с расстоянием (удовлетворяющим только одной из трех аксиом метрики: нулевое расстояние между элементами означает их совпадение) и обладающими некоторым аналогом свойства накрывания. Идея исследования неявных ДУ методами теории накрывающих отображений метрических пространств была предложена в [4,5]. На основании результатов о липшицевых возмущениях накрывающих отображений и о точках совпадения накрывающего и липшицева отображений в этих работах рассмотрена задача Коши, для которой были получены условия разрешимости, продолжаемости решений, оценки решений, условия непрерывной зависимости решений от параметров. Аналогичными методами, использующими результаты о векторных накрывающих отображениях, действующих в произведениях метрических пространств, в работах [6,7] были исследованы вопросы разрешимости краевых задач для неявных ДУ.

В настоящей работе благодаря применению более общих результатов об операторных уравнениях (в которых ослаблены и требования к расстоянию, и к свойствам отображений) получены утверждения о более широком классе краевых задач.

Статья содержит два раздела. В разделе 1. сформулированы необходимые определения свойств отображений, действующих из метрического пространства в пространство с расстоянием, и сформулированы два утверждения о существовании решений операторного уравнения и непрерывной зависимости множества его решений от порождающих это уравнение отображений. В разделе 2. показано, как краевая задача для неявного ДУ приводится к интегральному уравнению, которое может быть исследовано на основании результатов раздела 1. В результате формулируются теорема существования и теорема о непрерывной зависимости от параметров решений рассматриваемых краевых задач.

1. Операторное уравнение

Будем обозначать $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ и полагать для любого $r \in \mathbb{R}_+$ выполненными «естественные» соотношения: $r < +\infty$, $+\infty + r = +\infty$, $+\infty + (+\infty) = +\infty$.

Пусть задано метрическое пространство X с метрикой $\rho : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ (о метриках, которые могут принимать бесконечное значение см. [8]), и пусть задано непустое множество Y, на котором определено расстояние $d : Y \times Y \to \overline{\mathbb{R}}_+$, удовлетворяющее условию $d(y,z) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = z$, $y, z \in Y$. Сходимость $y_i \to y$ последовательности $\{y_i\}$ в пространстве (Y, d) будем определять соотношением $d(y, y_i) \to 0$. Важно заметить, что в пространстве с расстоянием предел последовательности не обязан быть единственным, а сходимости $d(y, y_i) \to 0$ и $d(y_i, y) \to 0$ не равносильны (более подробно о сходимости относительно расстояния, не являющегося метрикой, и о свойствах пространства (Y, d) см., например, [9,10]).

Рассмотрим уравнение

$$F(x, x) = \widehat{y} \tag{1.1}$$

относительно $x \in X$, где отображение $F : X \times X \to Y$ и элемент $\widehat{y} \in Y$ считаем известными. Отметим, что в этом уравнении наличие двух аргументов у отображения F, принимающих равные значения x, формально лишено смысла, достаточно определить отображение $G : X \to Y$ формулой $G(x) := F(x,x)$ при $x \in X$. Но в дальнейшем будут предполагаться выполненными разные условия на F по этим аргументам. Как отображение первого аргумента отображение F будет обладать «хорошим» свойством накрывания, а по второму аргументу F будет испытывать возмущения. В следующем разделе будет показано, что краевая задача для неявного ДУ может быть сведена к операторному уравнению именно такого вида. Что касается отображения G, то оно также будет использоваться в формулируемых ниже условиях разрешимости уравнения (1.1).

Определение 1.1 (см. [1]). Пусть заданы числа $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, множество $U \subset X$ и отображение $f : X \to Y$. Следующие множества

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}_\alpha[f;U] := \big\{(x,y) \in X \times Y \mid \exists u \in U \ f(u) = y, \ \rho(u,x) \leq \alpha^{-1} d(y, f(x)), \ \ \rho(u,x) < \infty\big\},\\
&\mathrm{Lip}_\beta[f;U] := \big\{(x,y) \in X \times Y \mid \forall u \in U \ f(u) = y \ \Rightarrow \ d(y, f(x)) \leq \beta \rho(u,x)\big\},\\
&\mathrm{Cl}[f;U] := \big\{(x,y) \in X \times Y \mid \forall \{x_n\} \subset U \ x_n \to x, \ f(x_n) \to y \ \Rightarrow \ f(x) = y\big\}
\end{aligned}$$

будем называть, соответственно, *множеством α-накрывания, множеством β-липшицевости и множеством замкнутости отображения f относительно U.*

Отметим, что отображение f обладает «классическим» свойством [11] α-накрывания (или β-липшицевости, или замкнутости) тогда и только тогда, когда $\mathrm{Cov}_\alpha[f;X] = X \times Y$ (соответственно $\mathrm{Lip}_\beta[f;X] = X \times Y$, или $\mathrm{Cl}[f;X] = X \times Y$).

Теорема 1.1 (теорема 2.1 [1])**.** *Пусть метрическое пространство X является полным, $x_0 \in X$, $\alpha > \beta \geq 0$ и $R := (\alpha - \beta)^{-1} d(\widehat{y}, F(x_0, x_0)) < +\infty$. Предположим, что для любого $x \in U := \big\{x \in X \mid \rho(x, x_0) \leq R\big\}$ выполнены включения*

$$(x, \widehat{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot, x); X], \quad (x, \widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x, \cdot); U], \quad (x, \widehat{y}) \in \mathrm{Cl}[G; U].$$

Тогда во множестве U существует решение уравнения (1.1).

Теперь рассмотрим вопрос об устойчивости решений уравнения (1.1) к изменениям отображения F и правой части $\widehat{y}$.

Предположим, что известно решение $\widehat{x} \in X$ уравнения (1.1). Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ заданы отображение $F_n : X \times X \to Y$ и элемент $\widehat{y}_n \in Y$. Рассмотрим уравнение

$$F_n(x,x) = \widehat{y}_n. \tag{1.2}$$

Сформулируем условия сходимости решений уравнения (1.2) при $n \to \infty$ к решению $\widehat{x}$ уравнения (1.1). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим отображение $G_n : X \to Y$ формулой $G_n(x) := F_n(x,x)$, $x \in X$.

Теорема 1.2 (теорема 1.1 [3])**.** *Пусть метрическое пространство X является полным, при каждом $n \in \mathbb{N}$ заданы числа $0 \leq \beta_n < \alpha_n$. Положим*

$$r_n := \frac{1}{\alpha_n - \beta_n} d\big(\widehat{y}_n, G_n(\widehat{x})\big), \quad U_n := \big\{x \in X \mid \rho(x, \widehat{x}) \leq r_n\big\}.$$

Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ при любом $x \in U_n$ выполнено

$$(x, \widehat{y}_n) \in \mathrm{Cov}_{\alpha_n}\big[F_n(\cdot, x); X\big], \ \ (x, \widehat{y}_n) \in \mathrm{Lip}_{\beta_n}\big[F_n(x, \cdot); U_n\big], \ \ (x, \widehat{y}_n) \in \mathrm{Cl}\big[G_n; U_n\big].$$

Если $r_n \to 0$ при $n \to \infty$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ уравнение (1.2) *разрешимо и существует такое его решение $\widehat{x}_n \in X$, что при $n \to \infty$ имеет место сходимость $\widehat{x}_n \to \widehat{x}$ в X.*

2. Краевая задача для неявного ДУ

В этом разделе предлагается исследование неявного ДУ с краевыми условиями достаточно общего вида. Исследование основано на представлении рассматриваемой краевой задачи в виде интегрального уравнения с отображением, действующим из полного метрического пространства суммируемых (по Лебегу) функций в пространство измеримых функций, которое мы наделяем расстоянием. К такому интегральному уравнению удается применить теоремы 1.1, 1.2.

Определим вначале функциональные пространства, используемые в данном исследовании. Элементами всех рассматриваемых ниже пространств будут функции, определенные на отрезке $[0,\tau]$, $\tau>0$, и имеющие значения в $\mathbb{R}$.

Обозначим через $\mathbb{S}$ — пространство измеримых (по Лебегу) функций $u:[0,\tau]\to\mathbb{R}$. Определим в $\mathbb{S}$ расстояние следующим образом. Пусть задана функция двух аргументов $\theta:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, являющаяся *суперпозиционно измеримой*, т.е. $\theta(z_1,z_2)\in\mathbb{S}$ для любых $z_1,z_2\in\mathbb{S}$ (это предположение выполнено, например, если функция θ непрерывна по каждому аргументу; более общие условия суперпозиционной измеримости см. в [12, 13]). Пусть также выполнено

Условие 2.1. При любом фиксированном $z\in\mathbb{R}$ функция $\theta(\cdot,z):\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ непрерывна в точке z, справедливо равенство $\theta(z,z)=0$ и

$$\forall\delta>0\ \exists\gamma=\gamma(z,\delta)>0\ \forall\upsilon\in\mathbb{R}\quad|\upsilon-z|\ge\delta\ \Rightarrow\ \theta(\upsilon,z)\ge\gamma.$$

Зададим расстояние $d^{\theta}:\mathbb{S}\times\mathbb{S}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ соотношением

$$\forall\upsilon,z\in\mathbb{S}\ \ d^{\theta}(\upsilon,z)=\operatorname*{vrai\ sup}_{t\in[0,\tau]}\ \theta(\upsilon(t),z(t)), \tag{2.1}$$

а соответствующее пространство $(\mathbb{S},d^{\theta})$ будем обозначать через $\mathbb{S}^{\theta}$.

Примером функции, удовлетворяющей условию 2.1, является $\theta_0(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$. Соответствующее этой функции расстояние $d^{\theta_0}:\mathbb{S}\times\mathbb{S}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ является метрикой в $\mathbb{S}$. Будем обозначать $\rho=d^{\theta_0}$, а пространство измеримых функций с такой метрикой — через $\mathbb{S}^{\theta_0}=(\mathbb{S},\rho)$. Заметим, что метрическое пространство $\mathbb{S}^{\theta_0}$ является полным.

В пространстве $\mathbb{S}$ измеримых функций выделим подпространство $\mathbb{L}$ суммируемых функций и пространство $\mathbb{L}_\infty$ существенно ограниченных функций. Пространство $\mathbb{L}$ с определенным формулой (2.1) расстоянием d^{θ} обозначим $\mathbb{L}^{\theta}$. Отображение $\rho=d^{\theta_0}$ является метрикой в $\mathbb{L}$, соответствующее метрическое пространство $\mathbb{L}^{\theta_0}$ является полным. Обозначим $\mathbb{AC}$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x:[0,\tau]\to\mathbb{R}$, имеющих п. в. на $[0,\tau]$ производную $\dot{x}\in\mathbb{L}$.

Пусть заданы измеримая функция $\widehat{y}:[0,\tau]\to\mathbb{R}$ и функция $f:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, измеримая по первому аргументу и непрерывная по совокупности второго и третьего аргументов. Рассмотрим неявное ДУ

$$f\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big)=\widehat{y}(t),\quad t\in[0,\tau]. \tag{2.2}$$

Получим условия существования решения $x\in\mathbb{AC}$ этого уравнения, удовлетворяющего краевому условию

$$\mathfrak{L}x:=\lambda x(0)+\int_0^{\tau}\Lambda(s)\dot{x}(s)ds=A. \tag{2.3}$$

Здесь $\lambda, A \in \mathbb{R}$, $\Lambda \in \mathbb{L}_\infty$. Рассматриваемое краевое условие является линейным условием общего вида, поскольку любой линейный непрерывный функционал, определенный на пространстве $\mathbb{AC}$, $\|x\|_{\mathbb{AC}} = |x(0)| + \|\dot{x}\|_{\mathbb{L}}$, $\|v\|_{\mathbb{L}} = \int_0^\tau |v(s)|ds$, представим в виде $\mathfrak{L}$ с единственными $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\Lambda \in \mathbb{L}_\infty$ (см. [14, § 2.1]).

Покажем, что краевая задача (2.2), (2.3) может быть записана в виде эквивалентного интегрального уравнения, которое можно рассматривать как операторное уравнение (1.1) с отображением F, действующим из $\mathbb{L}^{\theta_0}$ в $\mathbb{S}^\theta$. Таким образом, к исследованию краевой задачи (2.2), (2.3) применимы теоремы 1.1, 1.2, что позволит сформулировать условия ее разрешимости.

Пусть функция Λ не нулевая (иначе краевое условие превратится в начальное). Рассмотрим две возможные ситуации: $\lambda \neq 0$ и $\lambda = 0$, в каждой из которых для редукции к интегральному уравнению воспользуемся W-подстановкой заменой переменных, определяемой Н. В. Азбелевым (подробнее см. [14, с. 53]).

I. Пусть $\lambda \neq 0$. Определим «модельное» дифференциальное уравнение

$$(\mathcal{L}x)(t) := \dot{x}(t) = v(t), \quad t \in [0, \tau]. \tag{2.4}$$

Для любой функции $v \in \mathbb{L}$ и любого числа A краевая задача с условием (2.3) для уравнения (2.4) однозначно разрешима, ее решение записывается в виде

$$x(t) = \frac{A}{\lambda} - \int_0^\tau \frac{\Lambda(s)}{\lambda} v(s)ds + \int_0^t v(s)ds. \tag{2.5}$$

Подставляя соотношение (2.5) в уравнение (2.2), получим интегральное уравнение

$$f\big(t, \frac{A}{\lambda} - \int_0^\tau \frac{\Lambda(s)}{\lambda} v(s)ds + \int_0^t v(s)ds, \, v(t)\big) = \widehat{y}(t). \tag{2.6}$$

Для существования решения $x \in \mathbb{AC}$ краевой задачи (2.2), (2.3) необходимо и достаточно, чтобы существовало решение $v \in \mathbb{L}$ уравнения (2.6). При этом формула (2.5) позволяет выразить решение $x \in \mathbb{AC}$ задачи (2.2), (2.3) через решение $v \in \mathbb{L}$ уравнения (2.6).

Определим функции

$$\mathrm{f}(t, v, u) = f(t, \frac{A}{\lambda} + v, u); \tag{2.7}$$

$$\mathrm{K}(t,s) = \begin{cases} 1 - \Lambda(s)/\lambda & \text{при } 0 \le s \le t \le \tau, \\ -\Lambda(s)/\lambda & \text{при } 0 \le t < s \le \tau, \end{cases} \tag{2.8}$$

используя которые представим интегральное уравнение (2.6) в виде

$$\mathrm{f}\big(t, \int_0^\tau \mathrm{K}(t,s)\, v(s)ds, \, v(t)\big) = \widehat{y}(t), \quad t \in [0, \tau]. \tag{2.9}$$

Полученное уравнение (2.9) — это уравнение (1.1), в котором отображение $F : \mathbb{L}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^\theta$ определено формулой $F(u,v)(t) = \mathrm{f}\big(t, \int_0^\tau \mathrm{K}(t,s)\, v(s)ds, \, v(t)\big)$, $u, v \in \mathbb{L}^{\theta_0}$, и если это отображение удовлетворяет предположениям теоремы 1.1, то исследуемая краевая задача окажется разрешимой. Соответствующее утверждение будет приведено ниже после рассмотрения второй ситуации.

II. Пусть $\lambda = 0,$ т. е. краевое условие (2.3) теперь принимает вид

$$\mathfrak{L}x := \int_0^\tau \Lambda(s)\dot{x}(s)ds = A, \tag{2.10}$$

где $A \in \mathbb{R},$ $\Lambda \in \mathbb{L}_\infty$. В этом случае уравнение (2.4) нельзя выбрать в качестве «модельного», так как для него краевая задача с условием (2.10) не является однозначно разрешимой. В данном случае рассмотрим следующее «модельное» дифференциальное уравнение:

$$(\mathcal{L}x)(t) := \dot{x}(t) - \Lambda(t)x(t) = v(t), \quad t \in [0,\tau]. \tag{2.11}$$

Задача (2.11), (2.10) для каждого набора правых частей $v \in \mathbb{L},$ $A \in \mathbb{R},$ однозначно разрешима, ее решением является функция

$$x(t) = \frac{AM(t)}{\Delta(0)} - \int_0^\tau \frac{M(t)\Lambda(s)}{\Delta(0)} v(s)ds - \int_0^\tau \frac{M(t)\Delta(s)}{M(s)\Delta(0)} v(s)ds + \int_0^t \frac{M(t)}{M(s)} v(s)ds,$$

где $M(t) = \exp\Big(\int_0^t \Lambda(s)ds\Big),$ $\Delta(t) = \int_t^\tau \Lambda(\nu)^2 M(\nu)d\nu,$ $t \in [0,\tau],$ причем $\Delta(0) \neq 0,$ поскольку $\Lambda(t) \not\equiv 0$ и $M(t) > 0$ на $[0,\tau]$. После подстановки приведенной формулы в уравнение (2.2) получим эквивалентное рассматриваемой краевой задаче интегральное уравнение (2.9), где

$$\mathrm{f}(t,x,v) = f(t, \frac{AM(t)}{\Delta(0)} + x, v + \frac{A\Lambda(t)M(t)}{\Delta(0)} + \Lambda(t)x). \tag{2.12}$$

$$\mathrm{K}(t,s) = \begin{cases} 1 - \dfrac{M(t)\Lambda(s)}{\Delta(0)} - \dfrac{M(t)\Delta(s)}{M(s)\Delta(0)} & \text{при } 0 \le s \le t \le \tau, \\ -\dfrac{M(t)\Lambda(s)}{\Delta(0)} - \dfrac{M(t)\Delta(s)}{M(s)\Delta(0)} & \text{при } 0 \le t < s \le \tau. \end{cases} \tag{2.13}$$

Итак, и в случае $\lambda \neq 0,$ и в случае $\lambda = 0$ краевая задача (2.2), (2.3) записывается в виде интегрального уравнения (2.9). В первом случае в этом уравнении функции f, K определяются соотношениями (2.7), (2.8), во втором — соотношениями (2.12), (2.13).

Для формулировки утверждения о разрешимости краевой задачи (2.2), (2.3) (а фактически, о разрешимости полученного интегрального уравнения) введем следующие дополнительные обозначения.

Определим пространства $\mathbb{R}^\theta := (\mathbb{R},\theta)$ и $\mathbb{R}^{\theta_0} := (\mathbb{R},\theta_0),$ первое из которых — это вещественная прямая с «нестандартным» расстоянием $\theta(r_1,r_2)$ между числами $r_1, r_2 \in \mathbb{R},$ а второе — это вещественная прямая с «обычной» метрикой $|r_1 - r_2|,$ $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.

Для любого $v \in \mathbb{L}$ обозначим $(\mathbf{K}v)(t) = \int_0^\tau \mathrm{K}(t,s)v(s)ds$. Далее, положим

$$\mathrm{k}_0 = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \int_0^\tau |\mathrm{K}(t,s)|ds.$$

Отметим, что в силу определения функции K формулами (2.12) или (2.13), функция K существенно ограничена, следовательно, значение k_0 конечно. Для любого $v \in \mathbb{L}$ определим функции $\mathrm{g}^{[v]} : [0,\tau] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \mathbb{R}^\theta$ и $\mathrm{h}^{[v]} : [0,\tau] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \mathbb{R}^\theta$ соотношениями

$$\forall t \in [0,\tau] \ \ \forall u \in \mathbb{R} \quad \mathrm{g}^{[v]}(t,u) = \mathrm{f}(t,u,v(t)),$$

$$\forall t \in [0,\tau] \ \ \forall u \in \mathbb{R} \quad \mathrm{h}^{[v]}(t,u) = \mathrm{f}(t, \int_0^\tau \mathrm{K}(t,s)v(s)ds, u).$$

Теорема 2.1. *Пусть существует функция* $v_0 \in \mathbb{L}$ *такая, что*

$$R_0 := \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \theta\big(\widehat{y}(t),\, \mathrm{f}(t, u_0(t), v_0(t))\big) < \infty, \quad \text{где } u_0(t) := (\mathbf{K}v_0)(t).$$

Пусть заданы $\alpha > 0$, $\sigma \in (0, \alpha)$. *Положим* $R = R_0/\sigma$ *и определим многозначные отображения* $\Omega, \Xi : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$ *соотношениями*

$$\forall t \in [0,\tau] \;\; \Omega(t) := [u_0(t) - \mathrm{k}_0 R, u_0(t) + \mathrm{k}_0 R], \quad \Xi(t) := [v_0(t) - R, v_0(t) + R].$$

Пусть при любом $v \in \mathbb{L}$, *таком, что* $v(t) \in \Xi(t)$ *при п.в.* $t \in [0,\tau]$, *выполнены включения*

$$\big(v(t), \widehat{y}(t)\big) \in \mathrm{Cov}_\alpha\big[g^{[v]}(t,\cdot); \mathbb{R}\big], \quad \big((\mathbf{K}v)(t), \widehat{y}(t)\big) \in \mathrm{Lip}_\beta\big[\mathrm{h}^{[v]}(t,\cdot); \Omega(t)\big], \quad t \in [0,\tau],$$

где $\beta := (\alpha - \sigma)/\mathrm{k}_0$. *Тогда существует решение* $x \in \mathbb{AC}$ *краевой задачи* (2.2), (2.3) *такое, что* $(\mathcal{L}x)(t) \in \Xi(t)$ *при п.в.* $t \in [0,\tau]$.

Доказательство этого утверждения состоит в проверке для интегрального уравнения (2.9) условий теоремы 1.1.

Аналогично, из теоремы 1.2 в качестве следствия выводятся условия устойчивости решения краевой задачи (2.2), (2.3) к возмущениям правых частей $\widehat{y} \in \mathbb{S}^\theta$, $A \in \mathbb{R}^\theta$ и функции f, определяющей дифференциальное уравнение.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ заданы: функция $f_n : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, являющаяся измеримой по первому аргументу и непрерывной по совокупности второго и третьего аргументов, измеримая функция $\widehat{y}_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ и число A_n. Для уравнения

$$f_n\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) = \widehat{y}_n(t), \quad t \geq 0, \tag{2.14}$$

рассмотрим краевую задачу с условием

$$\mathfrak{L}x := \lambda x(0) + \int_0^\tau \Lambda(s)\dot{x}(s)ds = A_n. \tag{2.15}$$

Здесь $\lambda, A_n \in \mathbb{R}$, $\Lambda \in \mathbb{L}_\infty$. Пусть задано решение $\widehat{x}$ задачи (2.2), (2.3). Сформулируем достаточные условия существования при любом $n \in \mathbb{N}$ решения $\widehat{x}_n$ задачи (2.14), (2.15) такого, что последовательность $\{\widehat{x}_n\}$ некоторым образом сходится к $\widehat{x}$.

Чтобы представить краевую задачу (2.14), (2.15) в виде эквивалентного интегрального уравнения, определим функцию f_n соотношениями

$$\mathrm{f}_n(t,x,v) = f_n(t, \frac{A_n}{\lambda} + x, v), \;\; \text{если } \lambda \neq 0,$$
$$\mathrm{f}_n(t,x,v) = f_n(t, \frac{A_n M(t)}{\Delta(0)} + x,\, v + \frac{A_n \Lambda(t) M(t)}{\Delta(0)} + \Lambda(t)x), \;\; \text{если } \lambda = 0.$$

В этих обозначениях краевая задача (2.14), (2.15) относительно функции $v = \dot{x} \in \mathbb{L}$ эквивалентна интегральному уравнению

$$\mathrm{f}_n\big(t, \int_0^\tau \mathrm{K}(t,s)\, v(s)ds,\, v(t)\big) = \widehat{y}_n(t).$$

Применим к этому уравнению теорему 1.1.

Для любого $v \in \mathbb{L}$ определим функции $\mathrm{g}_n^{[v]} : [0,\tau] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \mathbb{R}^\theta$, $\mathrm{h}_n^{[v]} : [0,\tau] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \mathbb{R}^\theta$ соотношениями

$$\forall t \in [0,\tau] \;\; \forall u \in \mathbb{R} \;\; \mathrm{g}_n^{[v]}(t,u) = \mathrm{f}_n(t, u, v(t)),$$
$$\forall t \in [0,\tau] \;\; \forall u \in \mathbb{R} \;\; \mathrm{h}_n^{[v]}(t,u) = \mathrm{f}_n(t, (\mathbf{K}v)(t), u).$$

Теорема 2.2. *Пусть задано решение* $\widehat{x} \in \mathbb{AC}$ *краевой задачи* (2.2), (2.3). *Обозначим* $\widehat{v}(t) := (\mathcal{L}\widehat{x})(t)$, $\widehat{u}(t) := (\mathbf{K}\widehat{v})(t)$, $t \in [0,\tau]$. *Предположим, что при каждом* $n \in \mathbb{N}$ *существует такое* $\sigma_n > 0$, *что при* $n \to \infty$ *имеет место сходимость*

$$R_n := \frac{1}{\sigma_n} \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \theta\big(\widehat{y}_n(t),\, \mathrm{f}_n(t, \widehat{u}(t), \widehat{v}(t))\big) \to 0.$$

Определим многозначные отображения $\Omega_n, \Xi_n : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *соотношениями*

$$\forall t \in [0,\tau] \;\; \Omega_n(t) := [\widehat{u}(t) - \mathrm{k}_0 R_n,\, \widehat{u}(t) + \mathrm{k}_0 R_n], \quad \Xi_n(t) := [\widehat{v}(t) - R_n,\, \widehat{v}(t) + R_n].$$

Пусть для всех $n \in \mathbb{N}$ *существует* $\alpha_n > \sigma_n$ *такое, что для любой функции* $v \in \mathbb{L}$, *если* $v(t) \in \Xi_n(t)$ *при п.в.* $t \in [0,\tau]$, *то выполнены включения*

$$\big(v(t), \widehat{y}_n(t)\big) \in \mathrm{Cov}_{\alpha_n}\big[\mathrm{g}_n^{[v]}(t,\cdot);\mathbb{R}\big], \quad \big((\mathbf{K}v)(t), \widehat{y}_n(t)\big) \in \mathrm{Lip}_{\beta_n}\big[\mathrm{h}_n^{[v]}(t,\cdot);\Omega_n(t)\big], \quad t \in [0,\tau],$$

где $\beta_n := (\alpha_n - \sigma_n)/\mathrm{k}_0$. *Тогда для любого* $n \in \mathbb{N}$ *существует решение* $\widehat{x}_n \in \mathbb{AC}$ *краевой задачи* (2.14), (2.15) *такое, что последовательность* $\{\mathcal{L}\widehat{x}_n\}$ *при* $n \to \infty$ *сходится в пространстве* $\mathbb{L}^{\theta_0}$ *к функции* $\widehat{v} = \mathcal{L}\widehat{x}$.

References

[1] Е. С. Жуковский, В. Мерчела, “О накрывающих отображениях в обобщенных метрических пространствах в исследовании неявных дифференциальных уравнений”, *Уфимский математический журнал*, **12**:4 (2020), 42–55; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, W. Merchela, “On covering mappings in generalized metric spaces in studying implicit differential equations”, *Ufa Mathematical Journal*, **12**:4 (2020), 41–54.

[2] С. Бенараб, Е. С. Жуковский, В. Мерчела, “Теоремы о возмущениях накрывающих отображений в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением”, Тр. ИММ УрО РАН, **25**, 2019, 52–63. [S. Benarab, E. S. Zhukovskii, W. Merchela, “Theorems on perturbations of covering mappings in spaces with a distance and in spaces with a binary relation”, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **25**, 2019, 52–63 (In Russian)].

[3] В. Мерчела, “Об устойчивости решений интегральных уравнений в классе измеримых функций”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 44–54. [W. Merchela, “On stability of solutions of integral equations in the class of measurable functions”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:133 (2021), 44–54 (In Russian)].

[4] Е. Р. Аваков, А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, “Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **45**:5 (2009), 613–634; англ. пер.:E. R. Avakov, A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskii, “Covering mappings and their applications to differential equations not solved with respect to the derivative”, *Differential Equations*, **45**:5 (2009), 627–649.

[5] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:11 (2011), 1523–1537; англ. пер.:A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskii, S. E. Zhukovskii, “On the well-posedness of differential equations unsolved for the derivative”, *Differential Equations*, **47**:11 (2011), 1541–1555.

[6] Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова, “Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **49**:4 (2013), 439–455; англ. пер.:E. S. Zhukovskii, E. A. Pluzhnikova, “Covering Mappings in a Product of Metric Spaces and Boundary Value Problems for Differential Equations Unsolved for the Derivative”, *Differential Equations*, **49**:4 (2013), 420–436.

[7] Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова, “Теорема о накрывании оператора в произведении метрических пространств”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **16**:1 (2011), 70–72. [E. S. Zhukovskii, E. A. Pluzhnikova, “A theorem on operator covering in the product of metric spaces”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **16**:1 (2011), 70–72 (In Russian)].

[8] Д. Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С. В. Иванов, *Курс метрической геометрии*, Институт компьютерных иссследований, Москва–Ижевск, 2004; англ. пер.:D. Burago, Yu. Burago, S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*, Graduate Studies in Mathematics, **33**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.

[9] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “ (q_1, q_2) -квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **82**:2 (2018), 3–32; англ. пер.:A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “ (q_1, q_2) -quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points”, *Izv. Math.*, **82**:2 (2018), 245–272.

[10] Е. С. Жуковский, “Неподвижные точки сжимающих отображений f –квазиметрических пространств”, *Сибирский математический журнал*, **59**:6 (2018), 1338–1350; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “The fixed points of contractions of f -quasimetric spaces”, *Siberian Mathematical Journal*, **59**:6 (2018), 1063—-1072.

[11] А. В. Арутюнов, “Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки”, *Доклады Академии наук*, **416**:2 (2007), 151–155. [A. V. Arutyunov, “Covering mappings in metric spaces and fixed points”, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, **416**:2 (2007), 151–155 (In Russian)].

[12] И. В. Шрагин, “Суперпозиционная измеримость при обобщенных условиях Каратеодори”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **19**:2 (2014), 476–478. [I. V. Shragin, “Superpositional measurability under generalized Caratheodory conditions”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **19**:2 (2014), 476–478 (In Russian)].

[13] И. Д. Серова, “Суперпозиционная измеримость многозначной функции при обобщенных условиях Каратеодори”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:135 (2021), 305–314. [I D. Serova, “Superpositional measurability of a multivalued function under generalized Caratheodory conditions”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:135 (2021), 305–314 (In Russian)].

[14] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1991. [N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rakhmatullina, *Introduction to the theory of functional differential equations*, Nauka Publ., Moscow, 1991 (In Russian)].

Информация об авторе

Мерчела Вассим, аспирант, кафедра функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов; Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург. Российская Федерация. E-mail: merchela.wassim@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3702-0932

Information about the author

Wassim Merchela, Post-Graduate Student. Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov; St. Petersburg University, St. Petersburg, Russian Federation. E-mail: merchela.wassim@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3702-0932

Поступила в редакцию 29.09.2021 г.
Поступила после рецензирования 15.11.2021 г.
Принята к публикации 27.11.2021 г.

Received 29.09.2021
Reviewed 15.11.2021
Accepted for press 27.11.2021